Mécanique Quantique

Exercice n°1 (★)

Un émetteur radio émet un signal de fréquence $105{,}5\,MHz$ et de puissance $100\,kW$. Évaluer le nombre de photons qu'il émet par seconde.

Exercice n°2 (★)

La lumière d'un faisceau laser est émise par des atomes effectuant une transition entre deux niveaux d'énergie distants de $2{,}28\,eV$. Quelle est la couleur de ce laser ?

Exercice n°3 (★★)

Trouver l'expression de la longueur d'onde λ_c telle que l'énergie d'un photon vaut deux fois l'énergie cinétique d'un électron s'ils ont tous les deux cette longueur d'onde. Calculer numériquement λ_c sachant que la masse de l'électron est $m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}\,kg$. A quel domaine du spectre électromagnétique appartient-elle ?

Exercice n°4 (★★)

1. Calculer la longueur d'onde De Broglie d'une personne de $75\,kg$ marchant à une vitesse de $4\,km.h^{-1}$ et comparer cette valeur à la largeur d'une ouverture de porte d'environ $1{,}3\,m$. Conclure.
2. Estimer la longueur d'onde de De Broglie pour un électron de masse $m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}\,kg$ dans un faisceau où il se déplace à $10^5\,m.s^{-1}$.
3. Le faisceau d'électron est envoyé vers une fente de largeur $0{,}50\,\mu m$. Est-il envisageable d'observer un phénomène de diffraction des électrons par la fente ? Si oui, quelle serait la largeur de la tache centrale sur un écran situé à $3\,m$?

Exercice n°5 (★★)

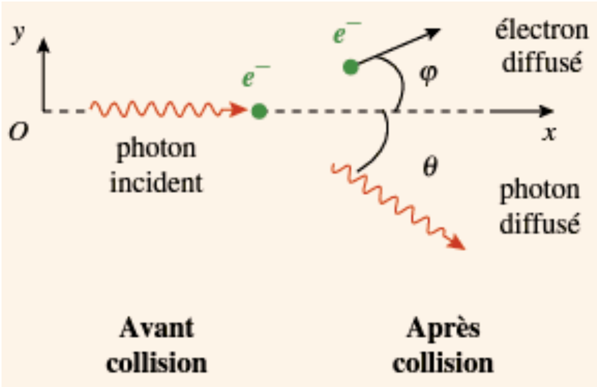
Une particule de masse m se déplace à la vitesse v très inférieure à la vitesse de la lumière. Elle n'est soumise à aucune force donc son énergie E se réduit à son énergie cinétique. On souhaite trouver la vitesse de propagation de l'onde de De Broglie.

1. Exprimer le vecteur d'onde k_{DB} de l'onde de De Broglie en fonction de m et v.
2. En admettant que la formule reliant l'énergie du photon à sa pulsation est aussi valable pour la particule, trouver une expression de ω_{DB} en fonction de m et v.
3. En déduire la vitesse de propagation de l'onde de De Broglie.

Exercice n°6 (★★★)

Arthur.H.Compton découvrit qu'un rayonnement incident pouvait être diffusé par la matière (en fait par les électrons) et perdre de l'énergie, c'est-à-dire émerger avec une longueur d'onde plus grande. Pour expliquer cette observation, considérons qu'un photon de fréquence ν entre en collision avec un électron au repos, de masse m_e. On note (Ox) la direction du photon incident. Suite à la collision, un photon (photon diffusé) de fréquence

ν' est alors émis dans une direction qui forme un angle θ avec l'axe (Ox) et l'électron acquiert une vitesse et donc une quantité de mouvement $\overrightarrow{p_e}$ qui forment un angle φ avec (Ox) (électron diffusé).



1. Exprimer l'énergie et la quantité de mouvement d'un photon en fonction de sa fréquence.
2. À l'aide de la conservation (classique) de l'énergie et en supposant que la vitesse initiale de l'électron est négligeable devant celle du photon (électron au repos), établir une relation entre les fréquences des photons et la quantité de mouvement de l'électron diffusé.
3. Lors d'une collision, la quantité de mouvement (vectorielle) se conserve. En utilisant cette loi, établir deux relations entre ν, ν', p_e, θ et φ.
4. En supposant $\delta\nu \ll \nu$ et en utilisant les équations obtenues précédemment, montrer que l'on a :

$$\delta\nu = \nu - \nu' \approx \nu^2 \frac{h}{m_e c^2}\left(1-\cos(\theta)\right)$$

5. Justifier l'observation de Compton. Quel doit être l'angle θ du photon diffusé, pour que la vitesse de l'électron soit maximale ?

Exercice n°7 (★★★)

L'un des systèmes les plus simples à étudier en mécanique quantique est le confinement d'une particule dans un puits rectangulaire infini. On se limite à l'étude des états stationnaires.

On considère une particule de masse m, décrite par sa fonction d'onde $\psi(x)$. Cette particule, libre de se mouvoir, est confinée dans un puits rectangulaire restreint à une dimension, $0 < x < a$ et où les murs sont infranchissables. Cette situation est représentée par une énergie potentielle $E_p(x)$ qui est nulle à l'intérieur du puits mais qui est infinie à l'extérieur. Soit :

$$E_p(x) = \begin{cases} 0 \; si \; 0 < x < a \\ +\infty \; si \; x < 0 \; ou \; x > a \end{cases}$$

Dans le puits, l'énergie se réduit donc à l'énergie cinétique. Dans ce cas, on montre que l'équation de Schrödinger vérifiée par la fonction d'onde s'écrit :

$$-\frac{\bar{h}^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = E \times \psi$$

1. Préciser les conditions aux limites.
2. Écrire l'équation différentielle en fonction du nombre d'onde $k = \sqrt{2mE} / \hbar$. La résoudre en donnant la forme générale des solutions et montrer que k ne peut prendre que certaines valeurs discrètes.
3. En déduire l'expression générale de l'énergie de la particule, puis celle des quatre premiers états quantiques.
4. En utilisant la normalisation de la fonction d'onde, déterminer complètement la fonction d'onde $\psi_n(x)$.
5. Tracer la fonction et la probabilité de présence de la particule dans le puits, pour les quatre premiers états d'énergie.